УДК 517.956

С. А. Алдашев

МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье для уравнения

$$t^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0,$$

$p = \text{const} > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $m \geqslant 2$, найден многомерный аналог известного «условия Геллерстедта»

$$a_i(x, t) = 0(1)\, t^{\alpha}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \alpha > \frac{p}{2} - 1,$$

и при выполнении его доказана однозначная разрешимость задач Дарбу.

Исследованию задач Дарбу для двумерных вырождающихся гиперболических уравнений посвящены многочисленные работы, например [1—4].

Проблема поиска многомерных аналогов задач Дарбу для гиперболических уравнений возникла еще в 50-е годы [5—7].

Затруднения принципиального характера возникают при отыскании корректных задач Дарбу, даже для волнового уравнения, когда нехарактеристическая часть границы области представляет собой поверхность пространственного типа [8—11].

Рассмотрим взаимно-сопряженные уравнения

$$Lu \equiv t^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0, \tag{1}$$

$$L^* v \equiv t^p \Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i v) - \frac{\partial}{\partial t}(bv) + cv = 0, \tag{1*}$$

$p = \text{const} > 0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geqslant 2$.

ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1993. Вып. 5.

Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек (x, t), ограниченная характеристическими коноидами $r = \frac{2}{p+2} t^{(p+2)/2} + \varepsilon$, $r = 1 - \frac{2}{p+2} t^{(p+2)/2}$ и плоскостью $t = 0$, где $r = |x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $0 \leqslant t \leqslant ((p+2)(1-\varepsilon)/4)^{\frac{1}{p+2}}$, а $0 < \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу dD_ε области D_ε, обозначим соответственно через S_ε, S_1, S^ε.

В качестве многомерных аналогов задач Дарбу можно рассмотреть следующие.

Задача 1. В области D_ε найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S^\varepsilon} = \tau_\varepsilon(x), \quad u\Big|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x) \tag{2}$$

или

$$u_t\Big|_{S^\varepsilon} = \nu_\varepsilon(x), \quad u\Big|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x). \tag{3}$$

Задача 1*. В области D_ε найти решение уравнения (1*), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S^\varepsilon} = \tau_\varepsilon(x), \quad u\Big|_{S_1} = \sigma_1(x) \tag{2*}$$

или

$$u_t\Big|_{S^\varepsilon} = \nu_\varepsilon(x), \quad u\Big|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{3*}$$

Взаимно-сопряженные задачи 1 и 1* (задача (1), (j) сопряжена с задачей (1*), (j^*), $j = 2, 3$) в осесимметрическом случае исследованы в [11].

В дальнейшем удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$.

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!\, n!\, k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$. Если $m = 2$, то $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система функций $\{\sin n\theta_1, \cos n\theta_1\}$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, \ldots$ — пространства Соболева.

Имеют место следующие леммы [12].

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W^l_2(S^\varepsilon)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r)\, Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом $f^k_n(r) = \int_\Gamma f Y^k_{n,m}(\theta)\, d\Gamma$, где Γ — единичная сфера в E_m.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r, \theta) \in W^l_2(S^\varepsilon)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f^1_0(r)| \leqslant c_1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f^k_n(r)|^2 \leqslant c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Через $\tau^k_{\varepsilon n}(r)$, $\nu^k_{\varepsilon n}(r)$, $\sigma_{\varepsilon n}(r)$, $\tilde{a}^k_{in}(r, t)$, $\hat{a}^k_{in}(r, t)$, $\tilde{b}^k_n(r, t)$, $\tilde{c}^k_n(r, t)$, ρ^k_n обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $\tau_\varepsilon(r, \theta)$, $\nu_\varepsilon(r, \theta)$, $\sigma_\varepsilon(r, \theta)$, $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$, $a_i f(\theta)\rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $f(\theta) = r_{x_i} = x_i/r$, $i = 1, \ldots, m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(S^\varepsilon)$.

Пусть $0 < p < 4/3$ и $a_i, b, c \in W^l_2(D_\varepsilon) \cap C^1(\overline{D}_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \geqslant m$, тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если $\tau_\varepsilon(x) \in W_2^l(S^\varepsilon) \cap C^1(\overline{S}^\varepsilon)$, $\sigma_\varepsilon(x) \in W_2^l(S_\varepsilon) \cap C^1(S_\varepsilon)$, $l \geqslant m+1$ и $\nu_\varepsilon(x) \in W_2^l(S^\varepsilon)$, $l \geqslant m$, то задача 1 имеет единственное решение в классе $C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S^\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$.

Пусть теперь $p > 0$ и, кроме того, при $p \geqslant 2$ выполняется условие

$$a_i(x, t) = 0(1)\, t^\alpha, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \alpha > \frac{p}{2} - 1 \text{ в } \overline{D}_\varepsilon, \tag{5}$$

которое является многомерным аналогом «известного условия Геллерстедста» для двумерных вырождающихся гиперболических уравнений.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. Если $a_i, b, c \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \geqslant m+1$ и $\tau_\varepsilon(x) \in W_2^l(S^\varepsilon)$, $\sigma_\varepsilon(x) \in W_2^l(S_\varepsilon)$, $l \geqslant m+3$, то задача (1), (2) однозначно разрешима в $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \geqslant m+1$.

Теорема 3. Пусть $a_i, b \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \geqslant m+2$, $c \in W_2^l \times (D_\varepsilon)$, $l \geqslant m+1$ и $\nu_\varepsilon(x) \in W_2^l(S^\varepsilon)$, $l \geqslant m$, $\sigma_\varepsilon(x) \in W_2^l(S_\varepsilon)$, $l \geqslant m+1$, тогда задача (1), (3) разрешима, причем единственным образом, если $u \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \geqslant m+1$.

Теорема 4. Если $a_i, b, c \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \geqslant m$, то решение задачи 1* единственно в классе функций $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \geqslant m+1$.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем единственность решения задачи (1), (2). В сферических координатах $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, t уравнение (1) имеет вид

$$t^p\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t)\, u_{x_i} + b(r, \theta, t)\, u_t +$$
$$+ c(r, \theta, t)\, u = 0,$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \quad g_1 = 1,$$
$$g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1}), \quad j > 1. \tag{6}$$

Так как $u \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \geqslant m+1$, то в силу леммы 1 она разложима в ряд

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} v_n^k(r, t)\, Y_{n,m}^k(\theta). \tag{7}$$

Подставим (7) в (6). Полученное выражение сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$, а затем проинтегрируем по единичной сфере Γ. Тогда для определения функций $v_n^k(r, t)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$t^p \rho_0^1 v_{0rr}^1 - \rho_0^1 v_{0tt}^1 = 0; \tag{8}$$

$$t^p \rho_1^k v_{1rr}^k - \rho_1^k v_{1tt}^k = \frac{-1}{k_1}\left[\left(\frac{m-1}{r} t^p \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1\right) v_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 v_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 v_0^1\right], \; k = \overline{1, k_1},$$

$$t^p \rho_n^k v_{nrr}^k - \rho_n^k v_{ntt}^k = \frac{-1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{\left(\frac{m-1}{r} t^p \rho_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i,n-1}^k\right) v_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k v_{n-1t}^k +\right.$$
$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k - \frac{\lambda_{n-1}}{r^2} t^p \rho_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m \left(\tilde{a}_{i,n-2}^k - (n-1)\,\hat{a}_{i,n-1}^k\right)\right] v_{n-1}^k\right\}, \tag{9}$$

$$\lambda_n = n(n+m-2), \; k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Здесь мы использовали тот факт, что [12, 13] $Y_{0,m}^k(\theta) = \mathrm{const}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \times Y_{n,m}^k(\theta) = \left.\frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\right|_{r=1} - n r_{x_i} Y_{n,m}^k$, $Q_n^k(x) = r^n Y_{n,m}^k$ — гармоническая функция от x, причем $\left.\dfrac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\right|_{r=1}$ — есть m-мерная сферическая функция $Y_{n-1,m}^k(\theta)$ порядка $n-1$.

В силу того что $\tau_\varepsilon(x)\equiv 0$, $\sigma_\varepsilon(x)\equiv 0$, с учетом леммы 1 имеем

$$v_0^1(r,\ 0)\equiv 0,\ v_0^1(r,\ r-\varepsilon)\equiv 0, \tag{10}$$

$$v_n^k(r,0)\equiv 0,\ v_n^k(r,\ r-\varepsilon)\equiv 0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=1,2,\ldots,\ \varepsilon\leqslant r\leqslant 1. \tag{11}$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе однородных задач Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений (8), (9). Из условия (5) следует, что

$$\hat{a}_{in}^k(r,t)=O(1)\,t^{\alpha},\quad i=1,\ldots,m,\ \alpha>\frac{p}{2}-1,\quad k=\overline{1,k_n},\ n=1,2,\ldots, \tag{12}$$

т. е. выполняется условие Геллерстедта для коэффициентов уравнения (9). Учитывая (12), из результатов работы [2] находим, что задача (8), (10) и (9), (11) имеет только тривиальное решение, т. е. $v_n^k(r,\ t)\equiv 0$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$

Следовательно, из (7) вытекает, что $u(r,\ \theta,\ t)\equiv 0$.

Теперь докажем существование решения задачи (1), (2). Для этого искомое решение будем строить в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}v_n^k(r,t)\,Y_{n,m}^k(\theta), \tag{13}$$

при этом $L\bar{u}_n^k=0$, а функции $v_n^k(r,\ t)$ удовлетворяют уравнениям

$$t^p\rho_0^1v_{0rr}^1-\rho_0^1v_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i0}^1\right)v_{0r}^1+\tilde{b}_0^1v_{0t}^1+\tilde{c}_0^1v_0^1=0; \tag{14}$$

$$t^p\rho_n^kv_{nrr}^k-\rho_n^kv_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{in}^k\right)v_{nr}^k+\tilde{b}_n^kv_{nt}^k+$$
$$+\left[\tilde{c}_n^k-\frac{\lambda_nt^p\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-1}^k-n\hat{a}_{in}^k)\right]v_n^k=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=1,2,\ldots \tag{15}$$

и краевым условиям

$$v_0^1(r,0)=\tau_{\varepsilon 0}^1(r),\quad v_0^1(r,r-\varepsilon)=\sigma_{\varepsilon 0}^1(r), \tag{16}$$

$$v_n^k(r,0)=\tau_{\varepsilon n}^k(r),\quad v_n^k(r,r-\varepsilon)=\sigma_{\varepsilon n}^k(r),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{17}$$

В [2] доказано, что если выполняется условие (12), то задачи (14), (16) и (15), (17) однозначно разрешимы.

В силу линейности оператора L следует, что $Lu=0$, а из леммы 1 и ортогональности систем функций $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ [12] получим, что функция (13) удовлетворяет краевому условию (2).

Таким образом, решение задачи (1), (2) построено.

Учитывая ограничения на функции $\tau_\varepsilon(x)$, $\sigma_\varepsilon(x)$, $a_i(x,\ t)$, $b(x,\ t)$, $c(x,\ t)$, $i=1,\ldots,m$ и лемму 2, из [12] имеем неравенства

$$\left|\frac{\partial^j v_n^k}{\partial r^j}\right|\leqslant c_1n^{-l},\quad \left|\frac{\partial^j v_n^k}{\partial t^j}\right|\leqslant c_2n^{-l},\quad j=0,1,2,\quad l\geqslant m+1. \tag{18}$$

Из (18), а также из оценок [12, 13]

$$k_n\leqslant c_1n^{m-2},\quad \left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leqslant c_2n^{\frac{m}{2}-1+l},\quad j=1,\ldots,m-1, \tag{19}$$

следует, что полученное решение $u(r,\ \theta,\ t)$ в виде (13) принадлежит классу $C(\bar{D}_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon)$, более того, в силу (18) и леммы 2 $u\in W_2^l(D_\varepsilon)$, $l\geqslant m+1$

Теорема 2 доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3. По аналогичной схеме, как в случае задачи (1), (2), однородная задача, соответствующая задаче (1), (3), сводится к двумерной задаче Дарбу для уравнений (8), (9) с данными

$$v_{nt}^{k}(r, 0) \equiv 0, \quad v_n^k(r, r-\varepsilon) \equiv 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \varepsilon \leqslant r \leqslant 1.$$

Учитывая (12), из результатов работы [1] имеем $v_n^k(r, t) \equiv 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда из (7) получим, что $u(r, \theta, t) \equiv 0$.

Для доказательства существования решения задачи (1), (3) будем искать ее в виде ряда (13), где $Lu_n^k = 0$, а функции $v_n^k(r, t)$ удовлетворяют уравнениям (14), (15) и краевым условиям

$$v_{0t}^1(r, 0) = \nu_{\varepsilon 0}^1(r), \quad v_0^1(r, r-\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon 0}^1(r), \quad \varepsilon \leqslant r \leqslant 1; \tag{20}$$

$$v_{nt}^k(r, 0) = \nu_{\varepsilon n}^k(r), \quad v_n^k(r, r-\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon n}^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

В [1] установлено, что при выполнении условия (12) задачи (14), (20) и (15), (21) имеют единственные решения. Представления решения этих задач, учитывая ограничения на функции $\nu_\varepsilon(x)$, $\sigma_\varepsilon(x)$ и на коэффициенты уравнения (1), а также лемму 2, позволяют получить оценки $\left|\frac{\partial^j v_n^k}{\partial r^j}\right| \leqslant c_1 n^{-2l}$, $\left|\frac{\partial^j v_n^k}{\partial t^j}\right| \leqslant c_2 n^{-2l}$, $j = 0, 1, 2$, $l \geqslant m$. Теперь нетрудно установить, что функция (13) удовлетворяет уравнению (1), краевому условию (3) и принадлежит классу $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \geqslant m+1$.

Теорема 3 доказана.

Справедливость теоремы 4 доказывается аналогично тому, как доказывалась единственность решения задачи 1 в теоремах 2 и 3, при этом нужно использовать результаты работы [14].

Рассмотрим теорему 1 и задачу (1), (2). Так как искомое решение из класса $C(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, то его можно искать в виде ряда (7). Тогда функции $v_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, будут удовлетворять уравнениям (8), (9) и краевым условиям (16), (17). Задачи (8), (16) и (9), (17) имеют единственные решения (см. [4]), при этом нетрудно получить неравенства

$$\left|\frac{\partial^j v_n^k}{\partial r^j}\right| \leqslant c_1 q^{n+1} n^{-2l}, \quad \left|\frac{\partial^j v_n^k}{\partial t^j}\right| \leqslant c_2 q^{n+1} n^{-2l}, \quad q = \text{const} < 1, \ l \geqslant m. \tag{22}$$

Из оценок (22), (19) вытекает, что полученное решение $u(r, \theta, t)$ в виде (7) задачи (1), (2) из класса $C(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S^\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$.

Что касается задачи (1), (3), то она сводится к однозначно разрешимым задачам (8), (20), и (9), (21) [4], для которых нетрудно установить оценки вида (22).

Следовательно, задача (1), (3) также имеет единственное решение (7) и в силу (22), (19) принадлежит искомому классу.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что корректность рассматриваемых задач для общих гиперболических уравнений при жестких условиях на их коэффициенты и граничные данные показана в [10, 15, 16].

1. *Gellerstedt S.* Sur une equation lineáre aux derivées partielles de type mixte // Arkiv Math., Ast. och Fysik.— 1937.— 25A, N 29.— P. 1—25.
2. *Protter M. H.* On partiel differential equations of mixed type // Proc. Conf. on differ. equations. University of Maryland book store College Park.— 1956.— P. 91—106.
3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.— М. : Наука, 1981.— 448 с.
4. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения.— Минск : Вышэйш. шк., 1977.— 158 с.
5. *Protter M. H.* New boundary value problems for the wave equation and equation of mixed type // J. Ration. Mech. Anal.— 1954.— 3, № 4.— P. 435—446.
6. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР.— 1956.— 110, № 6.— С. 901—902.
7. *Wang G. Y.* The Goursat problems in space // Sci. Record, New ser.— 1957.— 1, N 5.— P. 7—10.

8. *Tong K. Ch.* On a boundary value problem for the wave equation // Ibid.— P. 1—2.
9. *Каратопраклиев Г. Д.* О единственности решения некоторых задач для уравнений смешанного типа и гиперболических уравнений в пространстве // Дифференц. уравнения.— 1982.— 18, № 1.— С. 59—63.
10. *Алдашев С. А.* Некоторые краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1990.— 32 с.
11. *Диденко В. П.* Краевые задачи для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1974.— 28 с.
12. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.— 254 с.
13. *Calderon A. P., Zygmund A.* Singular integral operators and differential equation // Amer. J. Math.— 1957.— 79, N 4.— P. 901—921.
14. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР.— 1969.— 187, № 4.— С. 736—739.
15. *Алдашев С. А.* Некоторые задачи для многомерных гиперболических уравнений второго порядка // Алгебра и математический анализ.— Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1990.— С. 66—74.
16. *Алдашев С. А.* О некоторых краевых задачах для линейных многомерных гиперболических уравнений второго порядка // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 3.— С. 415—420.

Алма-Атин. ин-т инж.
железнодор. транспорта

Получено 10.12.91